Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Cinquième séance d'exercices –

`vecteurs de Killing & métrique de Schwarzschild`

***Exercice 0 : quantités conservées et géodésiques.** Montrer que la quantité

$$Q_\xi \equiv \xi_\mu \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$$

est conservée le long d'une géodésique quelconque $x^\mu(\lambda)$ si et seulement si ξ_μ est un vecteur de Killing.

Exercice 1 : vecteurs de Killing de l'espace-temps plat. Calculer les vecteurs de Killing de l'espace-temps de Minkowski et (*) déterminer l'algèbre qu'ils génèrent.

***Exercice 2 : vecteurs de Killing de $\mathcal{S}^2$.** La métrique de la sphère bi-dimensionnelle de rayon a est

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2), \quad \theta \in [0,\pi], \phi \in [0, 2\pi]\,.$$

Calculer les trois vecteurs de Killing indépendants de cette sphère et déterminer l'algèbre qu'ils génèrent.

Exercice 3 : géodésiques de Schwarzschild – conservation du moment angulaire. De par sa symétrie sphérique, la métrique de Schwarzschild possède trois vecteurs de Killing de type espace :

$$\begin{aligned} R =& \partial_\varphi\,, \\ S =& \cos\varphi\,\partial_\theta - \cot\theta \sin\varphi\,\partial_\varphi\,, \\ T =& -\sin\varphi\,\partial_\theta - \cot\theta\cos\varphi\,\partial_\varphi\,. \end{aligned}$$

a. Utiliser ces vecteurs de Killing pour montrer que

$$\ell^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} \qquad \text{où } p_\mu = m\,\frac{dx_\mu}{d\tau}$$

est une constante du mouvement le long des géodésiques.

b. En déduire que les géodésiques de la métrique de Schwarzschild sont planaires.

Exercice 4 : géodésiques de Schwarzschild – équations du mouvement. Montrer que les équations des géodésiques dans la métrique de Schwarzschild sont

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \frac{1}{2}\nu'\dot{r}^2 - re^\nu\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}e^{2\nu}\nu'\dot{t}^2 &= 0, \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} &= 0, \\ \ddot{t} + \nu'\dot{r}\dot{t} &= 0, \end{aligned}$$

où $\dot{}$ désigne une dérivation par rapport à λ et $'$ une dérivation par rapport à r. Les équations du mouvement obtenues à partir des symétries du problème sont

$$\begin{aligned} -e^\nu\dot{t}^2 + e^{-\nu}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 &= \eta, \\ r^2\dot{\phi} &= a, \\ e^\nu\dot{t} &= b \end{aligned}$$

avec $\eta = -1$ (respectivement $\eta = 0$) pour une géodésique de genre temps (resp. de genre lumière). Montrez-le ! Vérifier que ces équations impliquent bien les équations des géodésiques si $\dot{r} \neq 0$.